Développement : Surjectivité de l'exponentielle matricielle

Analyse & Probabilités

Référence : [ZAV] Zavidovique M., *Un max de Maths - Problèmes pour agrégatifs et mathématiciens, en herbe ou confirmés*, Calvage & Mounet, 2009, p48.
Pour les leçons :
- 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications. *(discutable)*
- 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 155 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 204 : Connexité. Exemples et applications.
- 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. O_n (resp. I_n) est la matrice nulle (resp. la matrice identité) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Théorème 1. ***Surjectivité de l'exponentielle matricielle.***

L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

est surjective.

Preuve : $\star$ exp est bien définie car, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente (la norme triple étant sous-multiplicative). De plus, $I_n = e^{A-A} = e^A e^{-A}$ (A et $-A$ commutent), donc $e^A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
On va décomposer le raisonnement en plusieurs étapes :
$\star$ Étape 1 : Montrons que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Or :

$$e^A = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!},$$

avec, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$. Donc $e^A \in \mathbb{C}[A]$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\exp(A) \in \mathbb{C}[A].}$$

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$\star$ Étape 2 : Montrons que $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Soit $M \in \mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc en notant $\chi_M = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ son polynôme caractéristique, on a $a_0 = (-1)^n \det(M) \neq 0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$, ce qui permet d'écrire :

$$a_0 I_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k M^k,$$

i.e. :

$$I_n = M \times \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} M^{k-1} \right),$$

ce qui prouve que :

$$M^{-1} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} M^{k-1} \in \mathbb{C}[C],$$

puisque $M \in \mathbb{C}[C]$. Donc $M \in \mathbb{C}[C]^\times$.
Réciproquement, si $M \in \mathbb{C}[C]^\times$, alors $M \in \mathbb{C}[C]$ et il existe $N \in \mathbb{C}[X]$ telle que $MN = I_n$, donc $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Donc :

$$\boxed{\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$$

$\star$ Étape 3 : Montrons que exp est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}[C], +)$ vers $(\mathbb{C}[C]^\times, \times)$.
On sait que $\mathbb{C}[C]$ est stable par produit, donc deux matrices de $\mathbb{C}[C]$ commutent. Cela permet d'écrire :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{C}[C]^2 \quad e^{A+B} = e^A e^B,$$

et donc la restriction de exp à $\mathbb{C}[C]$ est bien un morphisme de groupes. Il reste à montrer que $\exp(\mathbb{C}[C]) \subset \mathbb{C}[C]^\times$.
Par l'ÉTAPE 1, si $A \in \mathbb{C}[C]$, $e^A \in \mathbb{C}[C]$, mais on a aussi $e^A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Par l'ÉTAPE 2, $e^A \in \mathbb{C}[C]^\times$, ce qui achève l'ÉTAPE 3.

⋆ <u>ÉTAPE 4 :</u> Montrons que $\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$.
On a $\mathbb{C}[C]^\times = \mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est l'intersection de deux ouverts, donc $\mathbb{C}[C]^\times$ est un ouvert.
Maintenant, montrons que $\mathbb{C}[C]^\times$ est connexe par arcs. Soient $M, N \in \mathbb{C}[C]^\times$. L'application $f : z \longmapsto zM + (1-z)N$ vérifie $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}[C]$. On va chercher un chemin de la forme $f \circ z$, où z est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $z(0) = 0$ et $z(1) = 1$.
On remarque que $z \longmapsto \det(f(z))$ est polynomiale en z, non nulle car $M(0) = N$. Elle a donc un ensemble fini de zéros dans $\mathbb{C}$, qu'on note A.
On a en outre $0 \notin A$ et $1 \notin A$, puisque $\det(f(0)) = \det(N) \neq 0$, tout comme $\det(f(1)) = \det(M)$.
$\mathbb{C} \backslash A$ étant connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \backslash A$ continu tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$. Cela permet d'écrire :

$$\forall t \in [0,1] \quad f(\gamma(t)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

ce qui prouve que $f \circ \gamma$ est un chemin continu reliant N à M, contenu dans $\mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[C]^\times$, qui est ainsi connexe par arcs, donc connexe.

⋆ <u>ÉTAPE 5 :</u> Montrons que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[C]^\times$.
L'application $\exp : \mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]$ est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{C}[C]$, et on a $\mathrm{d}\exp(O_n) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$, qui est inversible.
D'après le théorème d'inversion locale, il existe $U \subset \mathbb{C}[C]$ ouvert contenant O_n et $V \subset \mathbb{C}[C]$ ouvert contenant I_n tels que $\exp : U \to V$ soit un difféomorphisme. $\exp(\mathbb{C}[C])$ contient donc un voisinage de I_n.
Maintenant, soit $M \in \exp(\mathbb{C}[C])$. Notons $M = \exp(N)$ avec $N \in \mathbb{C}[C]$. Par le travail précédent :

$$\exp(N + U) = MV,$$

qui contient M car $I_n \in V$. MV étant un ouvert contenu dans $\exp(\mathbb{C}[C])$, cela donne un voisinage ouvert de M dans $\exp(\mathbb{C}[C])$.

$$\boxed{\text{Donc } \exp(\mathbb{C}[C]) \text{ est un ouvert.}}$$

⋆ <u>ÉTAPE 6 :</u> Montrons que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un fermé.
On a que $\exp : \mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]^\times$ est un morphisme de groupes, donc $\exp(\mathbb{C}[C]) < \mathbb{C}[C]^\times$. On a donc la réunion disjointe suivante (classes à gauche) (qu'on peut aussi vérifier à la main) :

$$\mathbb{C}[C]^\times \backslash \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigsqcup_{A \in \mathbb{C}[C]^\times \backslash \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C]),$$

qui est une réunion d'ouverts puisque $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert.
Donc $\mathbb{C}[C]^\times \backslash \exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert, ce qui prouve que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un fermé de $\mathbb{C}[C]^\times$.

⋆ <u>ÉTAPE 7 :</u> Concluons.
$\exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert et un fermé de $\mathbb{C}[C]^\times$, qui est connexe. Comme il est non vide, $\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C]^\times$.
Maintenant, soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a $M \in \mathbb{C}[M]$, donc $M \in C[M]^\times$. Par le travail précédent, il existe $N \in \mathbb{C}[M]$ tel que $\exp(N) = M$, et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Cela achève la preuve. □